二次曲線の話(上)

AUTHOR(S):
松本, 敏三

CITATION:
松本, 敏三. 二次曲線の話(上). 天界 1921, 1(10): 173-179

ISSUE DATE:
1921-08-25

URL:
http://hdl.handle.net/2433/159611

天界 第十號(第一卷) 大正十年九月號

二次曲線の話(上)

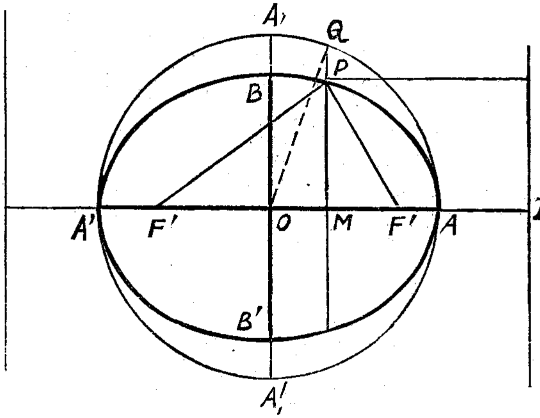
京都帝國大學助教授理學士 松本敏三

二次曲線の性質は、大體御承知でありませふが、多くの會員の中には或は其知識の不充分な方もあらうと思ひます。それで其等の人の爲めに、全く初等の方法で是非知られねばならむと云ふものだけを御話しします。例に依つて面倒な證明が重なりますが、證明の無いのは無意味であります。心の内で兎や角思うてゐても、夫れは小説でない。文章に書かれてあるか或は文章に書き得なければ小説でありませぬ。證明のなき數學は無いのです。

二次曲線は又圓錐曲線とも云ふ。圓錐を一つの平面で切る時、三種の曲線が出來る。圓錐をたてゝおいて、横に切ると楕圓が出來る。若し其一つの母線に並行に切ると、抛物線が出來る。圓錐の軸に並行に切ると、双曲線が出來る。夫れで此等の曲線を圓錐曲線と云ふ。二次曲線と云ふ名稱の意味は後に明になります。

楕圓

一、中心O半徑aなる圓と其の互に直角に交る直徑AA'及びAA_1'とを畫く(第一圖)。圓上の任意の一點QよりOAに垂線QMを下す。其垂線QM上に、$PM:QM$＝一定＝$b:a$なる如き點Pを記す。今Q點を圓周上に一廻りさせると、P點も一廻りして、圖の如き曲線$APBA'B'P'A$を得る。此の曲線を楕圓と云ふ。此$b:a$が一より大でも或は小でも作圖は同一である。但し此が一より大だと楕圓は圓の外に出る。此處の圓は此の値が一より小、即ち$b<a$の場合である。これから先きaはbより大と考へておく。QがAA'及びA_1A_1'に對照の位置にくれば、P'も亦明に對照の位置にくる。故に楕圓は此の二直線に關し對照である、故に中心Oに關し對照である。次ぎにQMはQがA_1に來た時最も高い、故に夫れに比例するPMもPがBに來た時最大である。然るに$A_1O=a$なる故



第一圖

$$\frac{BO}{A_1'O}=一定=\frac{b}{a}$$

から $BO=b$, 同様にして $B'O=b$.

點Oを此の楕圓の中心、AA'を長軸(長さ$2a$), BB'を短軸(長さ$2b$)、長軸の兩端A及びA'を頂點、圓を補助圓と云ふ。若し$a=b$即ち此が一だと楕圓は補助圓と一致する、依つて圓は楕圓の特種の場合である。

二、$\sqrt{a^2-b^2}=c$と書く、然る時はcはaより小である。今中心Oより長軸上に

$$OF=OF'=c$$

なる如く二點$F.F'$を畫く(第一圖)、此の二點を焦點と云ふ。次ぎに$c:a=e$と書き此を楕圓の離心率と云ふ。cがaより小なる故離心率eは一より小である

今中心Oより長軸の延長上に

$$OD=OD'=\frac{a}{e}$$

なる如き二點$D.D'$を取り、夫れを通つて長軸に垂線を畫く、此の二直線を準線と云ふ。eは一より小なる故準線は楕圓の外にあること明である。次ぎに楕圓上の任意の一點PよりDを通る準線に垂線PEを

下し、夫れと焦點への距離 PF との比を求める。

$$PE=OD-OM=\frac{a}{e}-OM,$$

$$PF^2=PM^2+FM^2$$

然るに

$$PM^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2QM^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2(a^2-OM^2),$$

$$FM=OF-OM=c-OM,\quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

此等の値を代入して少しく計算すると

$$PF=a-e.OM$$

となる、故に

$$PF:PE=e\text{……一定}<1.$$

P は楕圓上の任意の點なる故、定點と定直線へ至る距離の比が一定にして、其値が一より小なるが如き點の軌跡は楕圓なり。定點は焦點、定直線は準線にして、比は離心率に相當す。

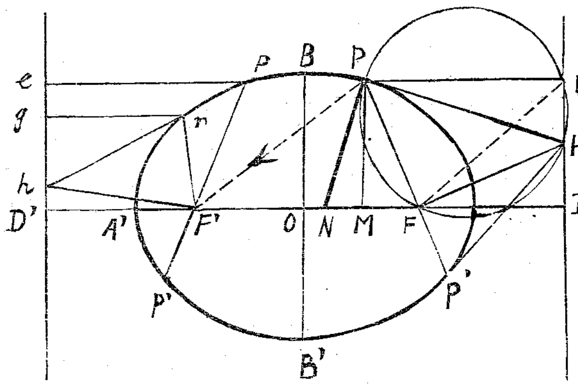
三、前節に於て

$$PF=a-e.OM$$

なる事を證明したが、夫れと同様の方法で他の焦點に至る距離

$$PF'=a+e.OM$$

なる事が容易に證明せられる、故に



第二圖

$PF+PF'=2a$,……長軸の長さ

Pは楕圓上の任意の點なる故、二定點に至る距離の和が一定なるが如き點の軌跡は楕圓なり。定點は焦點にして距離の和は、長軸の長さに相當す。此定理にて楕圓を機械的に畫く事が出來る。即ち或る長さの系の両端を二定$F.F'$に固定し、鉛筆で系を引きかけて一廻りすると鉛筆は楕圓を畫く。

四、三角形の頂角の內外二等分線が底邊を分つ分の比は頂角を挾む二邊の比に等し、且つ其の逆も眞なる事はよく御承知でせう。此定理を時々用ひます。

今楕圓上に任意の二點$p.r$を取り、焦點F'へ結ぶ。次ぎに其の二點からD'を通る準線に垂線pe, rgを下し弦prが其準線と交る點をhとす。(第二圖左)然る時は　第三條に云つた如く

$$pF'=e.pe,\ rF'=e.rg,$$

故に Δpeh は直角三角形なる事に注意すると、

$$\frac{pF'}{rF'}=\frac{pe}{rg}=\frac{ph}{rh}.$$

故に hF' は、$\Delta pF'r$ の $\measuredangle pF'r$ の外角の二等分線である。(此の證明に於て、若し焦點Fを使用するならば、準線にはDを通るものを用ひねばならず。F'を用ひたのは、圖面を節約する爲許りである)。

一般に曲線上の二點を通る直線があつて、其一點が限りなく他の點に接近した時の、直線の極限を接線と云ふ。で今點rが限りなく點pに接近(楕圓上で)すると、弦prは點pに於ける接線になる。然るに其際$\measuredangle pF'r$の外角は二直角になる。其外角の二等分線であるhF'は、其極限に於て、pF'に垂直になる。第二圖右に其場合が畫いてある。PHはPに於ける接線で、HFがPFに垂直である。次ぎに弦PFが延長して楕圓と交る點をP'とする。只今の證明でP'に於ける接線が、Dを通る準線との交點と焦點Fとを結んだ直線は弦$P'F$(即ちPF)に垂直である。然るに既に、$PF\perp HF$であるからP'に於ける接線は亦Hを通らねばならぬ。即ち焦點を通る弦の両端に

於ける接線の交點の軌跡は準線である。此の定理を使用すると、楕圓上の任意の一點に於ける接線を畫くのは容易である。卽ち其點より焦點を通る弦を引き、焦點より其の弦に垂線を引き、其れが準線と交る點と初めの點とを結んだものが求むる接線である。

五、曲線の一點に於て、其の點に於ける接線に垂直なる接線を法線と云ふ。既に前條で楕圓の接線の畫き方を御話したから楕圓の法線は容易に畫く事が出來る。尙ほ少し續けよう。點Pに於ける法線をPNとする(第二圖右)。Pより準線に垂線PEを下すと元來$\measuredangle PFH$は直角であるから、PHを直徑とする圓は、E及びFを通る。PNは法線であつて接線PHに垂直だから、PNは此の圓の接線である。

六、前條の定理及び$NF \parallel PE$を注意せば、

$$\measuredangle NPF=\measuredangle PEH,\quad \measuredangle PFN=\measuredangle FPE.$$

故に ΔPNF, ΔPEF は相似形である。故に第二條の定理を參考せば

$$\frac{NF}{PF}=\frac{PF}{PE}=e,\quad \therefore\ NF=e.PF.$$

同様にして $NF'=e.PF'$ であるから、$NF:NF'=PF:PF'$ となる。故に PN は $\Delta PFF'$ の頂角$\measuredangle FPF'$ の二等分線である。卽ち楕圓の一點に於ける法線は、其點を兩焦點に結んだ直線間の角を等分す。言ひかへると、楕圓を鏡と見れば焦點より出た光線は反射の後、他の焦點を通る事となる。之で焦點なる言葉が有意義である。

七、此れ以上の御話には立體幾何の知識が必要であるが、私は單に實例で其知識にかへます。太陽は遠方であるから、光線は並行光線であると假定します今若し一尺の棒(直線)の床上に投げる影が五寸なら二尺の棒の床上に投げる影は前の影の二倍卽ち一尺でしよう。此の二本の棒が別々であつて、互に並行の時も結果は同じです。卽ち互に並行なる棒の長さの比は、並行光線に依つて出來る影の長さの比に等

し。換言すると、並行光線の場合、並行なる棒の長さと、其の影の長さとは比例する。殊に、棒が床に並行なる時は、棒と影とは同じ長さである。

次ぎに、光線が床に直角な場合を考へる。矩形の板の投ずる影は、若し矩形の一邊が床に並行なる時は亦一つの矩形である。今其一邊の長さをmとすると影も亦mである。他の一邊の長さをnとすると、之は床に並行でないから影はn'となるだらふ。依つて面積の關係は次ぎの樣である。

$$影：矩形 = mn' : mn = n' : n.$$

即ち

$$影の面積 = 矩形の面積 \times \frac{n'}{n}.$$

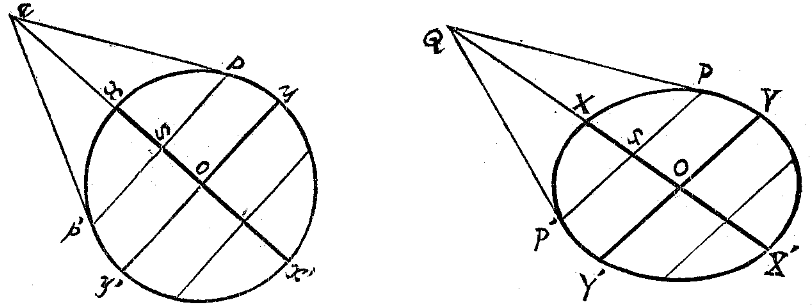
然るに棒の長さと影の長さとは比例するから、矩形の床に並行でない邊の長さ(n)が變つても上式は不變である。

今圓の投ずる影を考へる。其半徑がaだとすると、床に並行な圓の直徑AA'の影は同じ長さで$2a$である。而してAA'に直角な圓の弦と其の影とは比例する故に影は$2a$長とする楕圓であらねばならぬ(第一條)。AA'に直角な並行弦の內、直徑A_1A_1'の影は最も長い。其影の長さを$2b$とすると、其れか楕圓の短軸である。而して影と實物との比は上に云つた樣に$b:a$である。今圓を直徑AA'に並行な邊を持つ無數の矩形の和と見るならば、其各の矩形の面積に一定の比$b:a$を乘ずれば、影の面積が出來るから、其等を加へれば楕圓の面積となる、圓の面積はπa^2だから

$$楕圓の面積 = \pi a^2 . \frac{b}{a} = \pi ab.$$

即ち楕圓の面積は長軸の半分と、短軸の半分との積に、圓周率を乘じたものである。

八、第三圖は圓と其の影の楕圓とを別々に畫いたものである。圓のyy', pp'… 等の並行弦の影は亦楕圓のYY', PP'…等の並行弦となる。今Oを圓の中心yy'を其の直徑とする、而して其れに直角な直徑xx'



第三圖

の影は楕圓に於て、XX' となるとする。而る時は直徑 xx' は yy', pp', …等の並行弦の中點の軌跡である。故に XX' と亦 YY', PP', …等の並行弦の中點を通過する。其理由は明白だ。今御話した通り、例へば弦 pp' を取つて考へると、$ps=sp'$ だから、影に於ても $PS=SP'$ である。茲に S は s の影である。然るに圓の他の任意の並行弦の中點の軌跡(卽ちある直徑)も O を通るから、楕圓の任意の並行弦の中點の軌跡も亦 O を通る直線である。此の意味に於て O を通る楕圓の弦を徑と云ふ。長軸、短軸等は其徑である。且つ圓の直角なる直徑 xx', yy' の影である所の徑 XX', YY' を楕圓の共軛徑と云ふ。一對の共軛徑は必ずしも互に垂直でない併し只一つ長軸と短軸とは互に垂直なる共軛徑である。

次ぎに p, p' に於ける圓の接線の交點を q とすると、其れは直徑 xx' 上にあつて且つ $os.oq=ox^2$ となる事は御承知の通りである。此の接線の影は P, P' に於ける楕圓の接線となります。(接線を極く接近した二點を通る弦と見れば、此の理由は明白である)、且つ交點 Q は亦共軛徑の一つ XX' の上に來るに違いない。而して棒と其影とは比例するから、亦 $OS.OQ=OX^2$ なる事も明白である。一般に楕圓の二接線の交點を極、接點を連ねた直線を其極線と云ふ。そうすると、極は極線に並行な徑と共軛なる徑の上にあつて中心からの距離については上に書いた様な關係がある。極が楕圓上に來ると極線は接線となる。圓に於けると同樣である。まだ重要定理が若干殘つてゐるが、私は楕圓に關する話を之で打切る。